第３講　複素数の方程式と図形

3

［A］ k を実数とするとき，方程式 $x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$ の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点と見なす．

(1) z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ．

(2) z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ．

(3) 3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに θ だけ回転して得られる 3 点を ω_1，ω_2，ω_3 とする．ω_1，ω_2，ω_3 およびそれらと共役な点 $\overline{\omega}_1$，$\overline{\omega}_2$，$\overline{\omega}_3$ とが原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ の値を求めよ．

［B］ 複素数平面上の点 z を考える．

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき

$$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$$

を満たす点 z は $a\neq0$ のとき，どのような図形を描くか，ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す．

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p，q に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

を満たす点 z はどのような図形を描くか．

< Note >

第３講　複素数の方程式と図形

3　k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α，$\beta\ (\alpha\neq\beta)$ とする．i を虚数単位として次の問いに答えよ．

(1)　$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ．

(2)　複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A，B，P とする．$\angle$APB が直角になるような k の値を求めよ．

< Note >

第３講　複素数の方程式と図形

3

［A］ k を実数とするとき，方程式 $x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$ の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点と見なす．

(1) z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ．

(2) z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ．

(3) 3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに θ だけ回転して得られる 3 点を ω_1，ω_2，ω_3 とする．ω_1，ω_2，ω_3 およびそれらと共役な点 $\overline{\omega}_1$，$\overline{\omega}_2$，$\overline{\omega}_3$ とが原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および $\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ の値を求めよ．

［B］ 複素数平面上の点 z を考える．

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき

$$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$$

を満たす点 z は $a\neq0$ のとき，どのような図形を描くか，ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す．

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p，q に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

を満たす点 z はどのような図形を描くか．

【答】 ［A］ (1) $k=0,\ 1$　(2) $k=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

(3) $\begin{cases} k=\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\quad \theta=\dfrac{\pi}{2} \\ k=-\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\quad \theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi \end{cases}$

［B］ (1) 中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円

(2) d が実数のとき，点 z は p，q を通る直線，d が虚数のとき，点 z は中心 $\dfrac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$，半径 $\left|\dfrac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|$ の円

【解説】

［A］ (1) 与式の左辺を因数分解すると，

$$(x-1)(x^2-2kx+4k^2)=0$$

となるので，$w=1+\sqrt{3}\,i$ とおくと，この 3 次方程式の 3 解は

$$x=1,\ kw,\ k\overline{w}$$

と表せる．ここで $|w|=2$ であることに注意すると，この 3 解が一直線上にあるときには，kw と $k\overline{w}$ は共役であるから

$$「\frac{kw+k\overline{w}}{2}=1」\text{または}「kw=k\overline{w}」$$

のときなので $|w|=2$ より

$$k=1 \text{ または } k=0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{k=0,\ 1}$$

(2) kw や $k\overline{w}$ において直角はありえないので

$$\frac{kw-1}{k\overline{w}-1}=\pm i \iff kw-1=\pm k\overline{w}i\mp i$$

$$\therefore \quad k=\frac{1\pm i}{w\pm\overline{w}i} \text{（複号同順）}$$

$$=\boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}}$$

(3) いずれの場合も，$|z_1|=|z_2|=|z_3|$ となる必要があるので

$$|kw|=|k\overline{w}|=1 \qquad \therefore \quad k=\pm\frac{1}{2}$$

(Ⅰ) $k=\dfrac{1}{2}$ のとき z_1，z_2，z_3 は 1，$\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ となるので，そのとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ であれば題意を満たす．

(Ⅱ) $k=-\dfrac{1}{2}$ のとき z_1，z_2，z_3 は 1，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ となるので，そのとき $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ であれば題意を満たす．

(Ⅰ)(Ⅱ)より　$(k,\ \theta)$ の組は

$$\boldsymbol{(k,\ \theta)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{6}\pi\right)}$$

［B］(1)

$$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$$

$$\iff z\overline{z}+\frac{\overline{b}}{a}z+\frac{b}{a}\overline{z}+\frac{c}{a}=0$$

$$\iff \left(z+\frac{b}{a}\right)\left(\overline{z}+\frac{\overline{b}}{a}\right)-\frac{|b|^2}{a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\iff \left|z+\frac{b}{a}\right|^2=\frac{|b|^2-ac}{a^2}$$

$$\therefore \left|z+\frac{b}{a}\right|=\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$$

よって点 z は**中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円**を描く．

(2)

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p}) \quad \cdots\cdots ①$$

(Ⅰ) d が実数のとき，$d=\overline{d}$ より，$z\neq q$ のとき

$$① \iff (z-p)(\overline{z}-\overline{q})=(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

$$\iff \frac{z-p}{z-q}=\overline{\left(\frac{z-p}{z-q}\right)}$$

より $\dfrac{z-p}{z-q}$ は実数．このことと，①は $z=q$ を満たすことより，**d が実数のとき**，点 z は**p，q を通る直線**を描く．

(Ⅱ) d が虚数のとき，$d\neq\overline{d}$ より $d-\overline{d}\neq 0$ なので

$$① \iff (d-\overline{d})|z|^2+(\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q})z+(\overline{d}q-dp)\overline{z}+(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)=0$$

$$\iff |z|^2+\frac{\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q}}{d-\overline{d}}z+\frac{\overline{d}q-dp}{d-\overline{d}}\overline{z}+\frac{dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q}{d-\overline{d}}=0$$

となるが，$b=\dfrac{\overline{d}q-dp}{d-\overline{d}}$，$c=\dfrac{dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q}{d-\overline{d}}$ とおくと，$\overline{b}=\dfrac{\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q}}{d-\overline{d}}$，$\overline{c}=c$ となることより，$a=1$ とすることで(1)を用いることができる．

このとき，$-\dfrac{b}{a}=\dfrac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$ であることと

$$\frac{|b|^2-ac}{|a|^2}=\frac{\overline{d}q-dp}{d-\overline{d}}\times\frac{\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q}}{d-\overline{d}}-\frac{dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q}{d-\overline{d}}$$

$$=\frac{(\overline{d}q-dp)(d\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p})+(d-\overline{d})(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)}{|d-\overline{d}|^2}$$

$$=\frac{|d|^2(|p|^2+|q|^2-p\overline{q}-\overline{p}q)}{|d-\overline{d}|^2}$$

$$=\frac{|d|^2\,|p-q|^2}{|d-\overline{d}|^2}$$

より，**d が虚数のとき**，点 z は**中心 $\dfrac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$，半径 $\left|\dfrac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|$ の円**を描く．

第３講　複素数の方程式と図形

3　k を実数として，２次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の２つの解を α，β $(\alpha \neq \beta)$ とする．i を虚数単位として次の問いに答えよ．

(1)　$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ．

(2)　複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A，B，P とする．$\angle$APB が直角になるような k の値を求めよ．

【答】 (1) $k<0$，$3<k$ のとき $4k^2-6k+2$，$0<k<3$ のとき $6k+2$　(2) $k=-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$，1

【解説】

(1)　重解を持つ場合は考えなくてもよいので

$$(2k)^2-4\cdot1\cdot3k=4k(k-3)$$

より　$k<0$，$k>3$ のとき実数解，$0<k<3$ のとき虚数解をもつ．

(Ⅰ)　$k<0$，$k>3$ のとき α，β は実数より

$$\begin{aligned}&|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2\\&=(\alpha-i)(\overline{\alpha}+i)+(\beta-i)(\overline{\beta}+i)\\&=\alpha\overline{\alpha}+i\alpha-i\overline{\alpha}+1+\beta\overline{\beta}+i\beta-i\overline{\beta}+1\\&=\alpha^2+\beta^2+2\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2\\&=(-2k)^2-2\cdot3k+2\\&=\boldsymbol{4k^2-6k+2}\end{aligned}$$

(Ⅱ)　$0<k<3$ のとき α，β は実数係数の２次方程式の虚数解だから $\beta=\overline{\alpha}$ と表せる．このとき

$$\begin{aligned}&|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2\\&=\alpha\overline{\alpha}+i\alpha-i\overline{\alpha}+1+\beta\overline{\beta}+i\beta-i\overline{\beta}+1\\&=2\alpha\overline{\alpha}+2\\&=2\cdot3k+2\\&=\boldsymbol{6k+2}\end{aligned}$$

⑵　三平方の定理より

$$\begin{aligned} & \mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=\mathrm{AB}^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & |\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=|\beta-\alpha|^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & |\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=|(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta| \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ =& (-2k)^2-4\cdot 3k \\ =& 4k(k-3) \end{aligned}$$

より

(Ⅰ)　$k<0$，$k>3$ のとき

$$4k^2-6k+2=4k(k-3) \iff k=-\frac{1}{3}$$

(Ⅱ)　$0<k<3$ のとき

$$\begin{aligned} 6k+2=-4k(k-3) \quad & \Longleftrightarrow\quad 4k^2-6k+2=0 \\ & \Longleftrightarrow\quad 2(2k-1)(k-1)=0 \\ & \therefore\quad k=\frac{1}{2},\ 1 \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{k=-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1}$$